数理解析研究所講究録
903巻 1995年 138-141

非有界subnormal作用素について

九州芸工大　太田昇一 (Schôichi Ôta)

1. 1960年代前半のBiriuk and Coddington等の論文に見られるように、近年非有界作用素の(同じHilbert空間又は、それを含むより大きなHilbert空間上への) normal extensionの研究が多くの人々によってされてきた。特に、quantum creation作用素が、Bargmann空間上へnormal extensionがユニタリー同値の意味で実現されることから、Stochel and Szafraniec等によって組織的に研究されている。

McDonald and Sundbergはsubnormal作用素の定義にもっと強い条件を付加したstrongly subnormalなる概念を与えた(彼らは単にsubnormalと呼んでいるが)。これまで知られていたsubnormal作用素は、全てstrongly subnormalであり、そこでsubnormal作用素はstrongly subnormalなのかという疑問が生じた。ここでは、この非有界作用素に対するsubnormalityの定義に関連したこの疑問について考察する。

2. Sを稠密な定義域をもつHilbert空間$\mathcal{H}$上の作用素とする。

もし以下の条件を満たすとき、S は subnormal であると言う：

$\Longleftrightarrow$ 適当な Hilbert 空間 $K \supsetneqq \mathcal{H}$ と、その上のある normal 作用素 N で、

$$\mathcal{D}(S) \subseteqq \mathcal{D}(N) \cap \mathcal{H} \quad , \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

かつ、 $Sf = Nf$ for all $f \in \mathcal{D}(S)$

を満たすものが存在する。

上の定義において、(1)の等号が成立するとき，i.e.,

$$\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(N) \cap \mathcal{H}$$

S を strongly subnormal と言うことにする。

S が subnormal ならば、closable であり formally hyponormal ($\mathcal{D}(S) \subseteqq \mathcal{D}(S^*)$ and $\|Sx\| \geqq \|S^*x\|$ for all $x \in \mathcal{D}(S)$)。

さらに、strongly subnormal 作用素は、つねに closed であることに注意する。

3. ◦ closed symmetric 作用素
   ◦ subnormal weighted shift の closure
   (これは、1 で述べた quantum creation 作用素を含む)
   ◦ unbounded Toeplitz 作用素 T_φ ($\varphi \in H^2$)

   は strongly subnormal である。

4. 非有界作用素に対する実部、虚部の和に分けることを明確にさせるために、Cartesian 分解を定義する： 作用素 T が $T = T_1 + iT_2$ ， $T_1 \subseteqq T_1^*$ ，$T_2 \subseteqq T_2^*$ そして $\mathcal{D}(T_1) = \mathcal{D}(T_2)$ なる

とき、TはCartesian分解をもつと言う。明らかに、このとき、$\mathcal{D}(T) \subsetneqq \mathcal{D}(T^*)$であり、この分解は

$$T_1 = \frac{T+T^*}{2}, \quad T_2 = \frac{T-T^*}{2i}$$

で与えられる。

又、selfadjoint作用素S_1, S_2のspectral projectionsが互いに可換のとき、S_1とS_2はstrongly commuteと言う。

<u>定理</u>　TをHilbert空間$\mathcal{H}$上のclosed subnormal作用素で、そのCartesian分解を$T=T_1+iT_2$とする。さらに各T_iはessentially selfadjointで、そのclosure $\overline{T_1}$と$\overline{T_2}$はstrongly commuteと仮定する。このとき、NをTの任意のnormal extension (to a possibly larger Hilbert空間)とすると、Nの$\mathcal{H}$への制限はnormal作用素$\overline{T_1}+i\overline{T_2}$と一致する。

<u>系</u>　Tをclosed subnormalで、normalでないとする。Tが上の定理の仮定を満たすとき、Tはstrongly subnormalでない。

この系により、subnormalでstrongly subnormalでない例が構成出来る。

以上は下記のReferencesのÔtaの"On strongly normal extensions of unbounded operators"の一部です。

References

[1] G. Biriuk and E. A. Coddington, *Normal extensions of unbounded formally normal operators*, J. Math. Mech. **12** (1964), 617–638.

[2] G. McDonald and C. Sundberg, *On the spectra of unbounded subnormal operators*, Can. J. Math. **38** (1986), 1135–1148.

[3] S. Ôta, *A quasi-affine transform of an unbounded operator*, to appear in Studia Math.

[4] S. Ôta, *On strongly normal extensions of an unbounded operator*, in preparation.

[5] J. Stochel and F. H. Szafraniec, *On normal extensions of unbounded operators III*, Publ. RIM, Kyoto Univ **25** (1989), 105–139.